

den Verlauf als einer Temperaturverteilung im Sinne FERMIS oder LANDAUS.

3. Die mittlere Energie der erzeugten Schauer-
teilchen im S-System wächst nicht wesentlich stärker
als logarithmisch mit der Primärenergie an. Eine
Übereinstimmung mit dem nach FERMIS oder LANDAU
zu erwartenden Anstieg mit $E_{\text{prim}}^{1/4}$ kann nicht ge-
funden werden.

Insgesamt gibt also die von HEISENBERG angege-
bene Stoßwellenvorstellung eine gute Beschreibung
der angegebenen Daten. Will man dagegen den
experimentellen Befunden mit FERMIS Überlegungen
Rechnung tragen, müßte man auch schwach inelasti-
sche Stöße zulassen und außerdem annehmen, daß

die Emission erzeugter Teilchen keinem Gleich-
gewichtszustand im Wechselwirkungsvolumen der
Stoßpartner zu entsprechen braucht. Damit kommt
man aber der Stoßwellenvorstellung nahe. Die jüngst
von LANDAU²⁸ angegebene Modellvorstellung nimmt
hierbei insofern eine Mittelstellung ein, als sie hin-
sichtlich der Energieverteilung und Teilchenzahl der
FERMISchen, hinsichtlich der Winkelverteilung der
Stoßwellentheorie nahekkommt.

Den Herren Professoren Dr. W. HEISENBERG und Dr.
K. WIRTZ verdanke ich anregende Förderung und Auf-
nahme in das Institut. Herrn Dr. K. GOTTSTEIN danke
ich für zahlreiche Diskussionen und unseren Beobach-
terinnen für die mühevollen Arbeit bei der Durchmuster-
ung der Platten.

Zur Theorie der Störung kreisscheibenförmiger Neutronensonden, deren Radius klein gegen die Streuweglänge der Umgebung ist

Von H. MEISTER

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen
(Z. Naturforsch. **11 a**, 347—356 [1956]; eingegangen am 13. Februar 1956)

Es werden Aktivierungs- und Dichtestörung kreisscheibenförmiger Sonden im thermischen Neu-
tronenfeld berechnet für den Fall, daß der Sondenradius klein gegen die Streuweglänge des um-
gebenden Mediums ist. Den analogen Fall für Kugelsonden hat bereits BOTHE¹ behandelt. Die
Vermutung von TITTLE², daß BOTHEs Formel für die Aktivierungsstörung einer Kugelsonde in guter
Näherung auch für Scheibensonden gilt, wenn man für Sondenradius und mittlere Absorptionswahr-
scheinlichkeit der Kugel die entsprechenden Werte für die Scheibe einsetzt, führt auf Werte, die um
etwa 25% unter den unseren liegen. Die in einer früheren Arbeit³ gemessene Aktivierungsstörung
von Indiumfolien in Graphit wird durch unsere Rechnungen gut wiedergegeben.

Ist der Radius einer scheibenförmigen Sonde
klein gegen die Streuweglänge λ_s des umgebenden
Mediums, so fällt die Störung des Neutronenfeldes
in der Sondenumgebung innerhalb einer Streuweg-
länge sehr rasch ab. Aus diesem Grunde versagt hier
die elementare Diffusionstheorie. Zur Berechnung
der Aktivierungsstörung ist es aber in diesem Fall
nicht erforderlich, auf die Integro-Differentialgleichung der Transporttheorie zurückzugreifen, son-
dern man kann sich auf die Betrachtung einzelner
Streuprozesse beschränken, wie dies BOTHE¹ bei der
Kugelsonde getan hat. Dies führt auf ein Mehrfach-
integral, das sich verhältnismäßig leicht lösen läßt.

Die Sonde habe den Radius R , die Schichtdicke
 δ und den Absorptionskoeffizienten μ für ther-
mische Neutronen, die vorerst als monoenergetisch
angesehen werden. Die Absorptionslänge in der Son-

densubstanz und die geometrische Dicke der Sonde
seien klein gegen ihren Radius; die Streuung in der
Sonde sei zu vernachlässigen.

Der differentielle Neutronenfluß bei Abwesenheit
der Sonde werde mit $K_0(\vec{\Omega})$ bezeichnet (der Ein-
heitsvektor $\vec{\Omega}$ gibt die zugehörige Neutronenrichtung
an). $K_0(\vec{\Omega})$ soll am Orte der Sonde isotrop sein
und sich in der Umgebung einiger λ_s nicht wesentlich
ändern. Dann ist das Problem symmetrisch zur
Sondenebene, und man kann sich auf die Betrachtung
des einen Halbraumes beschränken.

$K_s(\vec{\Omega})$ sei der sich infolge der Störung an der
Sondenoberfläche einstellende Neutronenfluß. Dann
ist $K_s(\vec{\Omega}) d\Omega d\vartheta / |\cos \vartheta|$ die Zahl der Neutronen, die
pro Zeiteinheit aus dem Raumwinkelement $d\Omega$ um
die Richtung $\vec{\Omega}$ auf das um den Winkel ϑ gegen $\vec{\Omega}$

¹ W. BOTHE, Z. Phys. **120**, 437 [1943].

² C. W. TITTLE, Nucl. **8**, 5 [1951].

³ H. MEISTER, Z. Naturforsch. **10 a**, 669 [1955].



geneigte Flächenelement δf der Sonde auftreffen (s. Abb. 1). Dabei wird der Winkel ϑ gegen die äußere Sondennormale gemessen, so daß $\cos \vartheta < 0$ für in die Sonde eintretende Neutronen, $\cos \vartheta > 0$ für aus der Sonde austretende Neutronen gilt.

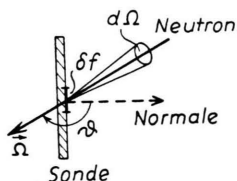


Abb. 1.

Die Neutronendichte ϱ_s an der Sondenoberfläche ist dann

$$\varrho_s = \frac{1}{v} \int_{\Omega} K_s(\vec{\Omega}) d\Omega \quad (v = \text{Neutronengeschwindigkeit})$$

oder, wenn man die Neutronenrichtung $\vec{\Omega}$ durch den Winkel ϑ und das zugehörige Azimut φ ausdrückt,

$$\varrho_s = \frac{1}{v} \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} K_s(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (1)$$

Die Sonde erfährt durch die von *beiden* Seiten auftreffenden Neutronen pro Flächeneinheit die Aktivierung¹

$$C = 2 \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} K_s(\vartheta, \varphi) |\cos \vartheta| (1 - e^{-\mu \delta / |\cos \vartheta|}) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (2)$$

Für die Aktivierung durch ein isotropes Neutronenfeld fand BOTHE¹

$$C = 2\pi K_s \Phi_0(\mu \delta), \quad (3)$$

mit

$$\Phi_0(\mu \delta) = 1 - (1 - \mu \delta) e^{-\mu \delta} + \mu^2 \delta^2 \text{Ei}(-\mu \delta);$$

$$\text{Ei}(-\mu \delta) = - \int_{\mu \delta}^{\infty} (e^{-t}/t) dt. \quad (4)$$

Sind ϱ_0 und C_0 die dem *ungestörten* Neutronenfeld $K_0(\vec{\Omega})$ entsprechenden Größen, so werden

$$(\varrho_0 - \varrho_s)/\varrho_s = \varkappa_s \quad (5)$$

als Dichtestörung und

$$(C_0 - C)/C = \varkappa_C \quad (6)$$

als Aktivierungsstörung bezeichnet⁴.

Diese Größen sollen nun als Funktion der Sonden-dimensionen und der Streuweglänge berechnet werden.

Dabei wird für das Streumedium vorausgesetzt:

1. Die Streuung im Laborsystem des Streumediums sei isotrop (Streumedium bestehend aus schweren Atomen, z. B. C).
2. Die Absorption sei klein gegen die Streuung ($\sigma_a \ll \sigma_s$).

Da mit $R \ll \lambda_s$ die Störung des Feldes der auf die Sonde *auf treffenden* Neutronen $\Delta K = K_0 - K_s$ klein gegen K_0 ist, wie in Abschnitt 3 gezeigt wird, so kann man mit K_0 auch das *gestörte* Neutronenfeld $K_s(\vartheta, \varphi)$ für $\pi/2 < \vartheta < \pi$ in guter Näherung als isotrop und über die Sondenoberfläche konstant ansehen und setzen:

$$K_s(\vartheta, \varphi) \approx K_s' = \text{const} \quad (\pi/2 < \vartheta < \pi). \quad (7)$$

Für die folgenden Rechnungen werde K_s' als gegeben angesehen.

1. Berechnung der Aktivierungsstörung

Es seien δf_1 und δf_2 zwei Flächenelemente der Sonde (Abb. 2), die einen Abstand l ($l \ll \lambda_s$) voneinander haben. Es werde zunächst die Störung des Neutronenfeldes $\delta K(\vec{\Omega}_2)$ am Orte von δf_2 berechnet, die durch die Absorption der Neutronen im Sonden-element δf_1 bedingt ist:

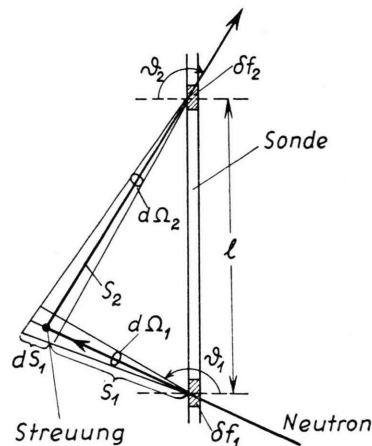


Abb. 2.

Von allen $K_s(\vec{\Omega}_1) d\Omega_1 \delta f_1 |\cos \vartheta_1|$ Neutronen, die mit der Richtung $\vec{\Omega}_1$ auf das Flächenelement δf_1 auftreffen, wird der Bruchteil

$$1 - \exp(-\mu \delta / |\cos \vartheta_1|)$$

absorbiert. Die Größe

⁴ M. A. VIGON u. K. WIRTZ, Z. Naturforschg. **9a**, 286 [1954].

$(1 - \exp(-\mu \delta / |\cos \vartheta_1|)) \cdot |\cos \vartheta_1| K_s(\vec{\Omega}_1) d\Omega_1 \delta f_1$ kann daher als die durch das Flächenelement δf_1 hervorgerufene Quellstärke des Störflusses $\delta K(\vec{\Omega})$ angesehen werden. Multipliziert man diese Größe mit der Rückstreuwahrscheinlichkeit auf das Flächenelement δf_2 , so erhält man gerade die Störung des Neutronenflusses an der Stelle von δf_2 durch das Sonderelement δf_1 .

Um die Rückstreuwahrscheinlichkeit zu finden, werden die Bahnen einzelner Neutronen betrachtet: bevor ein aus δf_1 mit Richtung $\vec{\Omega}_1$ kommendes Neutron mit Richtung $\vec{\Omega}_2$ auf δf_2 auftrifft, können ein oder mehrere Streuprozesse erfolgt sein. Die Rückstreuwahrscheinlichkeit setzt sich daher additiv zusammen aus der für Einfachstreuung, Zweifachstreuung usw. Erstere ergibt sich folgendermaßen:

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein aus δf_1 kommendes Neutron im Abstand s_1 längs ds_1 gestreut wird, ist $\exp(-s_1/\lambda_s) \cdot ds_1/\lambda_s$, die Wahrscheinlichkeit, von hier auf δf_2 zu gelangen, ist bei isotroper Streuung $\delta f_2 |\cos \vartheta_2| / 4 \pi s_2^2$ (Abb. 2). Die Rückstreuwahrscheinlichkeit auf δf_2 für die Stelle s_1 wird daher

$$\frac{\delta f_2 |\cos \vartheta_2|}{4 \pi \lambda_s} \frac{\exp(-s_1/\lambda_s)}{s_2^2} ds_1. \quad (8)$$

Bezieht man alle Längen auf die Größe l , so sieht man, daß diese Rückstreuwahrscheinlichkeit proportional zu l/λ_s ist für kleine s_1/λ_s . Auf dieselbe Weise zeigt sich, daß die Rückstreuwahrscheinlichkeiten für Mehrfachstreuung mit höheren Potenzen von l/λ_s zunehmen, also für $l \ll \lambda_s$ vernachlässigt werden können, was man auch anschaulich erwarten sollte.

Damit ist die Zahl der aus der Richtung $\vec{\Omega}_2$ auf δf_2 auftreffenden Neutronen des Störfeldes $\delta K(\vec{\Omega}_2)$

$$\delta K(\vec{\Omega}_2) d\Omega_2 \delta f_2 |\cos \vartheta_2| = \frac{\delta f_1 |\cos \vartheta_1| \delta f_2 |\cos \vartheta_2|}{4 \pi \lambda_s} (1 - \exp(-\mu \delta / |\cos \vartheta_1|)) K_s(\vec{\Omega}_1) d\Omega_1 \frac{\exp(-s_1/\lambda_s)}{s_2^2} ds_1$$

$$(\pi/2 < \vartheta_1 < \pi, \quad \pi/2 < \vartheta_2 < \pi),$$

und es ergibt sich als Störung des Neutronenflusses an der Stelle δf_2 durch das Sonderelement δf_1 bei Streuung im Abstand s_1

$$\delta K(\vec{\Omega}_2) d\Omega_2 = \frac{\delta f_1}{4 \pi \lambda_s} K_s(\vec{\Omega}_1) d\Omega_1 |\cos \vartheta_1| (1 - \exp(-\mu \delta / |\cos \vartheta_1|)) \cdot \frac{\exp(-s_1/\lambda_s)}{s_2^2} ds_1. \quad (9)$$

Dabei hängt die Richtung $\vec{\Omega}_2$ von $\vec{\Omega}_1$ und s_1 nach Abb. 2 ab.

Werden die Neutronenrichtungen $\vec{\Omega}$ wieder durch die Winkel ϑ und φ ausgedrückt, so ergibt sich durch Integration über ϑ_1 , φ_1 , s_1 und die Sondenfläche F für die Störung des Neutronenflusses $\Delta K(\vartheta_2, \varphi_2)$ durch die gesamte Sonde

$$\int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \Delta K(\vartheta_2, \varphi_2) \sin \vartheta_2 d\vartheta_2 d\varphi_2 \quad (10)$$

$$= \frac{1}{4 \pi \lambda_s} \int_F df_1 \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 K_s(\vartheta_1, \varphi_1) |\cos \vartheta_1| (1 - \exp(-\mu \delta / |\cos \vartheta_1|)) \int_0^{\infty} \frac{ds_1}{s_2^2}.$$

Hierbei konnte der Faktor $\exp(-s_1/\lambda_s)$ in Gl. (9) durch 1 ersetzt werden, denn ist s_1 vergleichbar mit $\lambda_s \gg l$, so ist näherungsweise $s_2 \approx s_1$ und damit auch $s_2 \gg l$.

Aus der Störung des Neutronenflusses $\Delta K(\vartheta_2, \varphi_2)$ soll nun die Aktivierungsstörung $\kappa_C = (C_0 - C)/C$ [Gl. (6)] bestimmt werden. Die Depression der Aktivierung $\Delta C = C_0 - C$ ist diejenige Aktivierung, die das Störfeld $\Delta K(\vartheta_2, \varphi_2)$ [Gl. (10)] in der Sonde nach Gl. (2) hervorrufen würde:

$$\Delta C = 2 \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \Delta K(\vartheta_2, \varphi_2) |\cos \vartheta_2| (1 - \exp(-\mu \delta / |\cos \vartheta_2|)) \sin \vartheta_2 d\vartheta_2 d\varphi_2. \quad (11)$$

Für kleine $\mu \delta$ ist der Faktor $|\cos \vartheta_2| (1 - \exp(-\mu \delta / |\cos \vartheta_2|))$ in Gl. (11) mit Ausnahme sehr kleiner $|\cos \vartheta_2|$ praktisch konstant und kann, über $\cos \vartheta_2$ gemittelt,

$$\int_{\pi/2}^{\pi} |\cos \vartheta_2| (1 - \exp(-\mu \delta / |\cos \vartheta_2|)) \sin \vartheta_2 d\vartheta_2 = \frac{1}{2} \Phi_0(\mu \delta) \quad [\text{s. Gl. (4)}],$$

vor das Integral gezogen werden:

$$\Delta C \approx \Phi_0(\mu \delta) \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \Delta K(\vartheta_2, \varphi_2) \sin \vartheta_2 d\vartheta_2 d\varphi_2.$$

Wird ΔC auf die Aktivierung $C = 2\pi K_s' \Phi_0(\mu \delta)$ [s. Gl. (3)] bezogen, so ergibt sich mit Gl. (7) für die Aktivierungsstörung das Integral

$$\kappa_C = \frac{\Delta C}{C} = \frac{1}{8\pi^2 \lambda_s} \int_F df_1 \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 \cos \vartheta_1 (1 - \exp(-\mu \delta / \cos \vartheta_1)) \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_1 ds_1}{s_2^2}. \quad (12)$$

Die Größe s_2 wird durch die Integrationsvariablen s_1 , ϑ_1 und φ_1 ausgedrückt. Aus Abb. 3 ersieht man:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \varphi_1 \sin \vartheta_1, \\ s_2^2 &= l^2 + s_1^2 - 2l s_1 \cos \varphi_1 \sin \vartheta_1. \end{aligned}$$

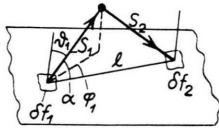


Abb. 3.

Mit $s_1/l = x$ erhält man für das letzte Doppelintegral

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_1 ds_1}{l^2 + s_1^2 - 2l s_1 \cos \varphi_1 \sin \vartheta_1} &= \frac{1}{l} \cdot I(\vartheta_1); \quad (13) \\ I(\vartheta_1) &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_1 dx}{x^2 - 2x \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 + 1}. \end{aligned}$$

Die Abhängigkeit von der Ortsvariablen l läßt sich also als Faktor vor das Integral über die Winkelvariablen ziehen. Damit stellt sich die Aktivierungsstörung als Produkt eines Integrals über die Scheibe mit einem Integral über die Winkelvariablen dar:

$$\begin{aligned} \kappa_C &= \frac{1}{8\pi^2 \lambda_s} \int_F \frac{df_1}{l} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos \vartheta_1 \\ &\quad \cdot (1 - \exp(-\mu \delta / \cos \vartheta_1)) \cdot I(\vartheta_1) \sin \vartheta_1 d\vartheta_1. \end{aligned} \quad (14)$$

Zunächst soll das Integral $I(\vartheta_1)$ berechnet werden. Mit der Substitution $\cos \varphi_1 = (1 - t^2)/(1 + t^2)$ läßt sich die Integration über φ_1 elementar ausführen:

$$\begin{aligned} I(\vartheta_1) &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_1 dx}{x^2 - 2x \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 + 1} \quad (0 < \vartheta_1 < \frac{\pi}{2}) \\ &= 2\pi \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 2x^2 \cos 2\vartheta_1 + 1}} \\ &= \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{\{(x - \sin \vartheta_1)^2 + \cos^2 \vartheta_1\} \{(x + \sin \vartheta_1)^2 + \cos^2 \vartheta_1\}}}. \end{aligned}$$

Die Integration über x führt auf das vollständige elliptische Integral erster Gattung⁵

$$K(k^2) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}.$$

Es gilt die Beziehung⁶

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{\{(x-r_1)^2 + t_1^2\} \{(x-r_2)^2 + t_2^2\}}} = \frac{2}{\sqrt{t_1 t_2 k_1}} K(k^2)$$

mit

$$\begin{aligned} k^2 &= (k_1^2 - 1)/k_1^2, \quad k_1 = A + \sqrt{A^2 - 1}, \\ A &= [(r_1 - r_2)^2 + t_1^2 + t_2^2]/2 t_1 t_2. \end{aligned}$$

Für unseren Fall wird nach elementaren Umformungen

$$A = \frac{1 + \sin^2 \vartheta_1}{1 - \sin^2 \vartheta_1}, \quad k_1 = \frac{1 + \sin \vartheta_1}{1 - \sin \vartheta_1} = \operatorname{ctg}^2 \frac{\omega}{2}, \quad k^2 = 1 - \operatorname{tg}^4 \frac{\omega}{2}$$

mit $\omega = \frac{\pi}{2} - \vartheta_1$

und hiermit $I(\vartheta_1)$

$$I = \frac{2\pi}{1 + \cos \omega} K\left(1 - \operatorname{tg}^4 \frac{\omega}{2}\right) \quad \left(\omega = \frac{\pi}{2} - \vartheta_1\right). \quad (15)$$

Die letzte Integration über ϑ_1 läßt sich nur numerisch durchführen. Es wird vorher zweckmäßig eine neue Variable eingeführt:

$$y = \operatorname{tg}(\omega/2),$$

$$\text{so daß gilt } \begin{cases} \cos \vartheta_1 = \sin \omega = 2y/(1+y^2) \\ \sin \vartheta_1 = \cos \omega = (1-y^2)/(1+y^2). \end{cases}$$

Dann wird das Integral in Gl. (14)

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos \vartheta_1 (1 - \exp(-\mu \delta / \cos \vartheta_1)) I(\vartheta_1) \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 \\ = 2\pi \varphi_0(\mu \delta) \quad \text{mit} \\ \varphi_0(\mu \delta) = \int_0^1 K(1-y^4) \frac{2y(1-y^2)}{(1+y^2)^2} \\ \cdot \left(1 - \exp\left[-\mu \delta \frac{1+y^2}{2y}\right]\right) dy, \end{aligned} \quad (16)$$

⁵ JAHNKE-EMDE, Tafeln höherer Funktionen, p. 74.

⁶ siehe z. B. GRÖBNER-HOFREITER, Integraltafel II, p. 47.

und man erhält für die Aktivierungsstörung

$$\kappa_C = \frac{\varphi_0(\mu \delta)}{4 \pi \lambda_s} \int_F \frac{df_1}{l} \quad (17)$$

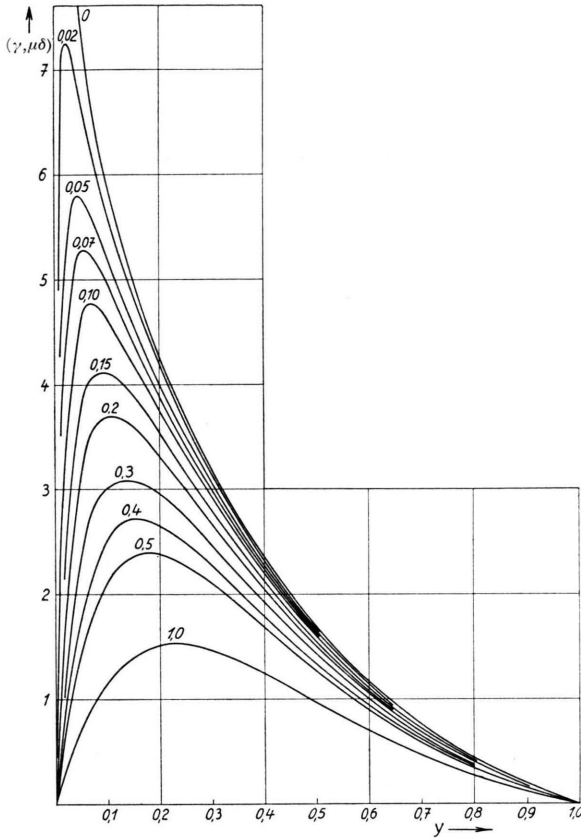


Abb. 4. Bestimmung des Integrals

$$\frac{\varphi_0(\mu \delta)}{\mu \delta} = \int_0^1 F(y, \mu \delta) dy \quad [\text{Gl. (16)}]$$

mit $F(y, \mu \delta) = K(1-y^4) \frac{2y(1-y^2)}{\mu \delta(1+y^2)^2} \left(-1 - \exp \left[-\mu \delta \frac{1+y^2}{2y} \right] \right)$;
 $F(y, \mu \delta)$ in Abhängigkeit von y ($\mu \delta$ als Parameter).

| $\mu \delta$ | $\varphi_0(\mu \delta) / \mu \delta$ | $\varphi_0(\mu \delta)$ |
|--------------|--------------------------------------|-------------------------|
| 0,000 | 2,483 | 0,0000 |
| 0,020 | 2,267 | 0,0453 |
| 0,050 | 2,107 | 0,1054 |
| 0,070 | 2,017 | 0,1412 |
| 0,100 | 1,908 | 0,1908 |
| 0,150 | 1,761 | 0,2642 |
| 0,200 | 1,638 | 0,3276 |
| 0,300 | 1,451 | 0,435 |
| 0,400 | 1,301 | 0,520 |
| 0,500 | 1,180 | 0,590 |
| 1,000 | 0,804 | 0,804 |

Tab. 1.

Zur Berechnung des Integrals in Gl. (16) wurde der Integrand für verschiedene Werte von $\mu \delta$ in Abhängigkeit von y graphisch dargestellt (Abb. 4) und ausplanimetriert. Daraus ergaben sich für die Funktion $\varphi_0(\mu \delta)$ die in Tab. 1 aufgeführten Werte. Die Funktion $\varphi_0(\mu \delta)$ ist in Abb. 5 dargestellt.

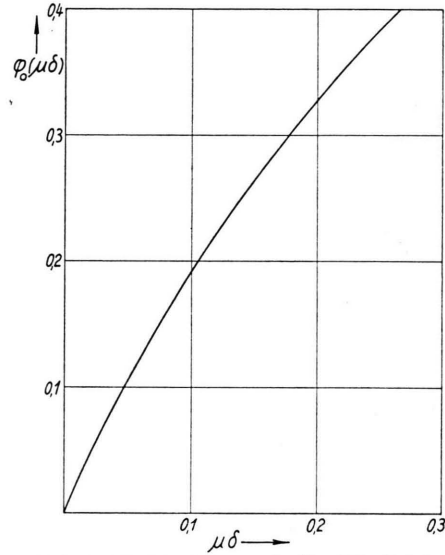


Abb. 5. Die Funktion $\varphi_0(\mu \delta)$ [Gl. (16)].

Zur Berechnung des Integrals $\int_F \frac{df_1}{l}$ werden Polarkoordinaten um die Stelle von df_2 als Zentrum eingeführt. Unter Berücksichtigung von

$$R^2 = r^2 + l^2 - 2rl \cos \alpha \quad (\text{siehe Abb. 6})$$

folgt

$$l(\alpha) = R(k \cos \alpha + \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}),$$

wenn mit r der Abstand von df_2 vom Zentrum bezeichnet und $r/R = k$ gesetzt wird.

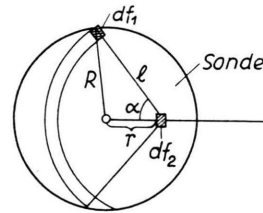


Abb. 6.

Das Integral zerfällt in zwei Anteile:

$$\int_F \frac{df_1}{l} = 2\pi \int_0^{R-r} \frac{dl}{l} + 2 \int_{R-r}^{R+r} \alpha(l) dl.$$

Wird α als Integrationsvariable eingeführt und partiell integriert

$$\int_{R-r}^{R+r} \alpha(l) dl = \int_{\pi}^0 \alpha \frac{dl}{d\alpha} d\alpha = \alpha l(\alpha) \Big|_{\pi}^0 + \int_0^{\pi} l(\alpha) d\alpha,$$

so ergibt sich schließlich für das Integral

$$\int_F \frac{df_1}{l} = 2 \int_0^\pi l(\alpha) d\alpha = 2R \int_0^\pi (k \cos \alpha + \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}) d\alpha.$$

Die Integration über das Glied $k \cos \alpha$ liefert keinen Beitrag, und man erhält

$$\int_F \frac{df_1}{l} = 4R \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} d\alpha = 4R E(k^2) \quad (18)$$

und als Aktivierungsstörung nach Gl. (17)

$$\kappa_C(r) = \frac{\varphi_0(\mu \delta)}{\pi} \frac{R}{\lambda_s} E(r^2/R^2); \quad (19)$$

$$E(k^2) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} d\alpha$$

ist das vollständige elliptische Integral 2. Gattung⁵.

Die Aktivierungsstörung hängt also vom Ort auf der Sonde ab (sie ist am Rande etwas kleiner als in der Mitte). Um die mittlere Aktivierungsstörung zu berechnen, wird die Funktion $E(k^2)$ über die Scheibe gemittelt:

$$\frac{\int_0^1 E(k^2) k dk}{\int_0^1 k dk} = \int_0^1 E(k^2) dk^2 = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} d\alpha dk^2.$$

Die Integration läßt sich geschlossen durchführen, da man zuerst über k^2 integrieren darf. Man erhält dann schließlich

$$\int_0^1 E(k^2) dk^2 = 4/3.$$

Da die Funktion $E(k^2)$ im Mittelpunkt der Scheibe ($k=0$) den Wert $\pi/2$ annimmt, ist das Verhältnis der mittleren Aktivierungsstörung $\bar{\kappa}_C$ zur Aktivierungsstörung im Sondenmittelpunkt $\kappa_C(0)$

$$\bar{\kappa}_C/\kappa_C(0) = \int_0^1 E(k^2) dk^2 / E(0) = 8/3 \pi = 0,849 \quad (\text{vgl. auch } ^3).$$

Es ist also

$$\bar{\kappa}_C = \frac{4}{3\pi} \frac{R}{\lambda_s} \varphi_0(\mu \delta), \quad (20)$$

$$\kappa_C(0) = \frac{1}{2} \frac{R}{\lambda_s} \varphi_0(\mu \delta). \quad (20a)$$

Ist die Sonde hinreichend klein, so daß die von den verschiedenen Teilen der Sonde ausgehende Strah-

lung vom Zählrohr mit gleicher Wahrscheinlichkeit registriert wird, so ist die Störung der vom Zählrohr angezeigten Aktivität gleich der gemittelten Aktivierungsstörung. Andernfalls ist mit der Geometrieabhängigkeit des Zählrohres als Gewichtsfunktion zu mitteln.

2. Vergleich mit den Ergebnissen von Bothe und Tittle

BOTHE fand als Aktivierungsstörung einer Kugel-sonde vom Radius $R' \ll \lambda_s$ und der mittleren Absorptionswahrscheinlichkeit α

$$\kappa_C = 0,34 (R'/\lambda_s) \alpha. \quad (21)$$

Er gab in seiner Arbeit¹ an, daß man näherungsweise die Aktivierungsstörung einer *scheibenförmigen* Sonde erhält, wenn man die gemittelte Absorptionswahrscheinlichkeit $\Phi_0(\mu \delta)$ der Scheibe für α und $2/3$ des Scheibenradius R für den Kugelradius R' einsetzt.

TITTLE² hingegen hat vorgeschlagen, in diesem Falle R' besser durch den Scheibenradius R zu ersetzen:

$$\kappa_C = 0,34 (R/\lambda_s) \Phi_0(\mu \delta). \quad (22)$$

Die Werte nach TITTLE [Gl. (22)] liegen um etwa 25% unter den unseren, wie Abb. 7 zeigt. Dort ist die von R/λ_s unabhängige Größe $\bar{\kappa}_C \cdot \lambda_s/R$ in Abhängigkeit von $\mu \delta$ aufgetragen.

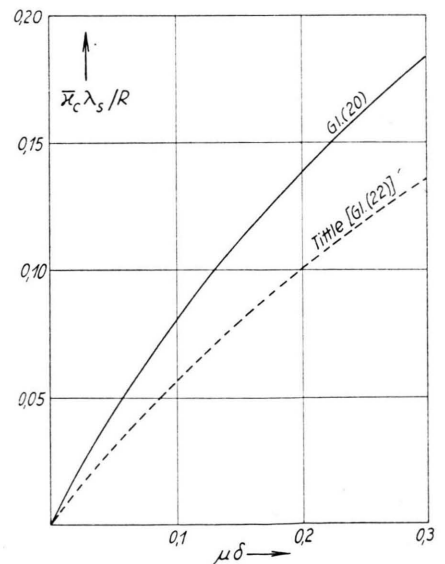


Abb. 7. Aktivierungsstörung $\bar{\kappa}_C \lambda_s/R$ in Abhängigkeit von $\mu \delta$ nach TITTLE [Gl. (22)] und unseren Rechnungen [Gl. (20)].

3. Berechnung der Dichtestörung an der Sonde

Zur Bestimmung der Dichtestörung $(\varrho_0 - \varrho_s)/\varrho_s$ wird zunächst die Dichtedepression an der Sondenoberfläche

$$\varrho_0 - \varrho_s = \frac{1}{v} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \Delta K(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

berechnet, die dabei in folgende zwei Anteile aufgespalten wird:

- I. die Depression des Feldes der auf die Sonde zu gerichteten Neutronen ($\cos \vartheta < 0$), bedingt

$$\int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \Delta K(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{K'_s}{4\pi \lambda_s} \int_F df_1 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta_1 \, d\vartheta_1 \cos \vartheta_1 (1 - \exp(-\mu \delta / \cos \vartheta_1)) \cdot \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_1 \, ds_1}{s_1^2} \quad (23)$$

Dieses Integral ist bis auf einen konstanten Faktor mit Gl. (12) identisch. Die dortige Rechnung kann also Schritt für Schritt übernommen werden, und man findet schließlich [vgl. Gl. (19)]

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \Delta K(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \\ = 2 K'_s \cdot \varphi_0(\mu \delta) \frac{R}{\lambda_s} E(r^2/R^2) = 2\pi (K_0 - K'_s). \end{aligned} \quad (24)$$

Mit $R \ll \lambda_s$ ist also die Störung $\Delta K(\vartheta, \varphi)$ des auf die Sonde auftreffenden Neutronenflusses klein gegen K'_s und damit der Ansatz Gl. (7) gerechtfertigt.

Denkt man sich das Feld der auf die Sonde auftreffenden Neutronen in der Näherung von Gl. (7) gegeben, so kann man unter Berücksichtigung der Neutronenabsorption $\exp[-\mu \delta / |\cos \vartheta|]$ auch das Feld der aus der Sonde austretenden Neutronen berechnen:

Um $\Delta K(\zeta) = K_0 - K_s(\zeta)$ für $\zeta > 0$ zu erhalten, muß noch

$$K_0 - K'_s = K'_s \frac{1}{\pi} \varphi_0(\mu \delta) \frac{R}{\lambda_s} E(r^2/R^2)$$

nach Gl. (24) addiert werden:

$$\Delta K(\zeta) = K'_s \left\{ \frac{1}{\pi} \varphi_0(\mu \delta) \frac{R}{\lambda_s} E(r^2/R^2) + (1 - \exp[-\mu \delta / \zeta]) \right\} \quad (\zeta > 0). \quad (25)$$

Durch Integration ergibt sich der gesuchte Anteil (II)

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \Delta K(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = 2\pi \int_0^1 \Delta K(\zeta) \, d\zeta = K'_s \left\{ 2\varphi_0(\mu \delta) \frac{R}{\lambda_s} E(r^2/R^2) + 2\pi \Psi(\mu \delta) \right\}. \quad (26)$$

Dabei wurde $\int_0^1 (1 - \exp[-\mu \delta / \zeta]) \, d\zeta = 1 - e^{-\mu \delta} - \mu \delta \operatorname{Ei}(-\mu \delta) = \Psi(\mu \delta)$ gesetzt (Abb. 9). (27)

durch diejenigen Neutronen des Störfeldes, die auf die Sonde „zurückgestreut“ werden,

- II. die Depression des Feldes der aus der Sonde austretenden Neutronen ($\cos \vartheta > 0$), bedingt durch die Neutronenabsorption bei Durchgang durch die Sonde.

Der erste Anteil (I) wurde bereits bei der Berechnung der Aktivierungsstörung in Gl. (10) bestimmt. Aus Gl. (10) ergibt sich unter Berücksichtigung des Ansatzes Gl. (7)

$$K_s(\zeta) = \exp[-\mu \delta / \zeta] \cdot K_s(-\zeta) = \exp[-\mu \delta / \zeta] \cdot K'_s \quad (\zeta = \cos \vartheta > 0). \quad (25)$$

[$K_s(\vartheta, \varphi)$ ist in der Näherung von Gl. (7) von φ unabhängig; es wird daher fortan $K_s(\vartheta, \varphi) = K_s(\zeta)$ mit $\zeta = \cos \vartheta$ gesetzt.]

Damit hat die Winkelverteilung der Neutronen an der Sondenoberfläche das in Abb. 8 qualitativ dargestellte Verhalten.

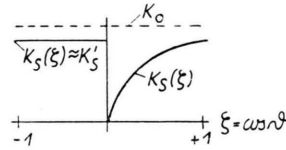


Abb. 8.

Aus Gl. (25) folgt bei bekanntem K'_s

$$K'_s - K_s(\zeta) = K'_s (1 - \exp[-\mu \delta / \zeta]) \quad (\zeta > 0).$$

Durch Zusammenfügen beider Anteile (I) Gl. (24) und (II) Gl. (26) erhält man

$$v \Delta \varrho = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Delta K(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = K_s' \left\{ 4 \varphi_0(\mu \delta) \frac{R}{\lambda_s} E(r^2/R^2) + 2\pi \Psi(\mu \delta) \right\}.$$

Zur Bestimmung der Dichtestörung muß noch durch

$$v \varrho_s = 2\pi \int_{-1}^0 K_s' \, d\zeta + 2\pi \int_0^1 K_s' \exp[-\mu \delta / \zeta] \, d\zeta = 2\pi K_s' (2 - \Psi(\mu \delta))$$

dividiert werden:
$$\kappa_s = \frac{\Delta \varrho}{\varrho_s} = \frac{1}{2 - \Psi(\mu \delta)} \left\{ \frac{2}{\pi} \varphi_0(\mu \delta) \frac{R}{\lambda_s} E(r^2/R^2) + \Psi(\mu \delta) \right\}. \quad (28)$$

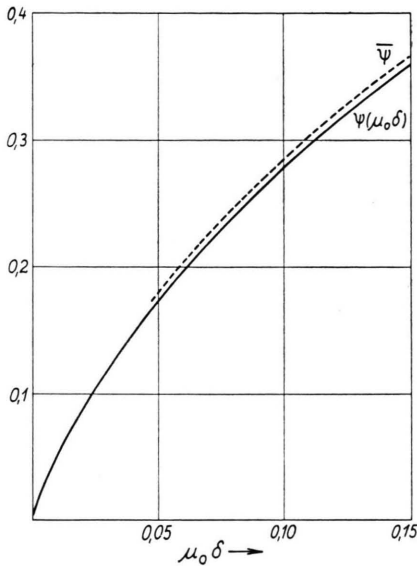


Abb. 9. Die Funktionen

$$\Psi(\mu_0 \delta) = (1 - e^{-\mu_0 \delta}) - \mu_0 \delta \operatorname{Ei}(-\mu_0 \delta) \quad [\text{Gl. (27)}]$$

$$\text{und } \bar{\Psi}(\mu \delta) \quad [\text{Gl. (32)}].$$

Die Dichtestörung an der Sondenoberfläche setzt sich also additiv aus zwei Gliedern zusammen. Das erste Glied hängt wie die Aktivierungsstörung von R/λ_s und dem Ort auf der Scheibe ab und unterscheidet sich von ihr nur durch den Faktor

$$1/[2 - \Psi(\mu \delta)],$$

das zweite Glied ist unabhängig von R/λ_s und dem Ort auf der Scheibe und hängt nur von $\mu \delta$ ab. Es gibt die Störung des direkt aus der Sonde herauskommenden Neutronenflusses durch die Absorption in der Sonde an. Man sieht, daß dieses Glied für $R \ll \lambda_s$ das erste um eine Größenordnung übertrifft. Die hierfür gegebene Ableitung ist nicht an die Voraussetzung $R \ll \lambda_s$, sondern nur an den Ansatz Gl. (7) gebunden.

4. Dichtestörung auf der Achse

Das zweite Glied von Gl. (28) läßt sich auch noch für Punkte auf der Achse berechnen und gibt den Abfall der Dichtestörung an der Sonde wieder, da sich das erste Glied im Bereich einer Streuweglänge

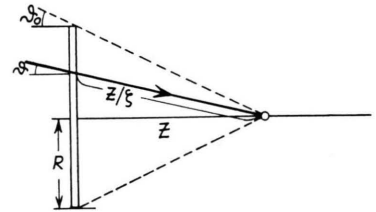


Abb. 10. $\zeta = \cos \vartheta$; $\zeta_0 = \cos \vartheta_0 = z/\sqrt{R^2 + z^2}$.

nur wenig ändert bzw. zu vernachlässigen ist. Mit dem Ansatz Gl. (7) ergibt sich für den Anteil (II) des Störfeldes ($\zeta > 0$) auf der Achse im Abstand z von der Sonde (Abb. 10)

$$\begin{aligned} \Delta K(z, \zeta) &= \left\{ K_s' (1 - e^{-\mu \delta / \zeta}) \exp[-z/\zeta \lambda_s] \quad (\zeta_0 < \zeta < 1) \right. \\ &= \left. \begin{aligned} &0 \quad (0 < \zeta < \zeta_0) \end{aligned} \right\} \quad (29) \end{aligned}$$

mit $\zeta_0 = z/\sqrt{R^2 + z^2}$,

wobei ΔK nur für diejenigen Richtungen ($\zeta_0 < \zeta < 1$) von Null verschieden ist, die einem wirklichen Durchgang durch die Sonde entsprechen. Der Faktor $\exp[-z/\zeta \lambda_s]$ berücksichtigt die „Streuung“ der Neutronen des Störfeldes in andere Richtungen.

Durch Integration folgt

$$\begin{aligned} v \Delta \varrho &= 2\pi \int_{\zeta_0}^1 \Delta K(\zeta) \, d\zeta \\ &= 2\pi K_s' \left\{ \int_{\zeta_0}^1 \exp[-z/\zeta \lambda_s] \, d\zeta - \int_{\zeta_0}^1 \exp\left[-\frac{\mu \delta + z/\lambda_s}{\zeta}\right] \, d\zeta \right\}. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man

$$\int_{\zeta_0}^1 e^{-a/\zeta} \, d\zeta = \zeta_0 e^{-a/\zeta_0} + \alpha \operatorname{Ei}(-\alpha/\zeta_0),$$

so erhält man nach elementaren Umformungen für den Anteil (II) der Dichtestörung schließlich den Ausdruck

$$\kappa_{II}(z) = \frac{1}{2 - \Psi(\mu\delta)} \left\{ \Psi(\mu\delta + z/\lambda_s) - \Psi(z/\lambda_s) \right. \\ \left. - \zeta_0 \left[\Psi\left(\frac{1}{\zeta_0}(\mu\delta + z/\lambda_s)\right) - \Psi\left(\frac{1}{\zeta_0}z/\lambda_s\right) \right] \right\}. \quad (30)$$

Damit ergibt sich für $z \ll \lambda_s$ für die Dichtestörung die Näherung

$$\kappa(z) = [\varrho_0 - \varrho(z)]/\varrho_s \quad (31) \\ = \frac{(R/\lambda_s) \varphi_0(\mu\delta) + \Psi(\mu\delta) - \zeta_0 \Psi(\mu\delta/\zeta_0)}{2 - \Psi(\mu\delta)} \quad \left| \zeta_0 = z/\sqrt{R^2 + z^2} \right|.$$

(Hierbei wurde das erste Glied von Gl. (28) als von z unabhängig angesehen und von dort übernommen.)

$\kappa(z)$ fällt also innerhalb einer Streuweglänge stark ab, und zwar um so steiler, je kleiner der Sondenradius ist.

5. Maxwellische Geschwindigkeitsverteilung

Es wird jetzt für das Feld der auf die Sonde auftreffenden Neutronen eine MAXWELLSche Geschwindigkeitsverteilung und für den Absorptionskoeffizienten der Sondensubstanz eine $1/v$ -Abhängigkeit vorausgesetzt. Infolgedessen werden die langsameren Neutronen bei Durchgang durch die Sonde bevorzugt absorbiert, die Geschwindigkeitsverteilung des unmittelbar aus der Sonde austretenden (negativen) Störfeldes ist also nach kleineren Geschwindigkeiten hin verschoben.

Für die Berechnung des Anteils (II) der Dichtestörung infolge direkter Absorption in der Sonde zeigt sich, daß die in Gl. (26) auftretende Funktion $\Psi(\mu\delta)$ über die Geschwindigkeitsverteilung der Neutronendichte zu mitteln ist⁷:

$$\bar{\Psi}(\mu_0\delta) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \Psi\left(\mu_0\delta \frac{v_0}{v}\right) e^{-v^2/v_0^2} \frac{v^2}{v_0^2} dv. \quad (32)$$

Hierbei ist v_0 die wahrscheinlichste Geschwindigkeit der MAXWELL-Verteilung und μ_0 der dieser Geschwindigkeit entsprechende Absorptionskoeffizient. In Abb. 9 ist diese numerisch berechnete Funktion mit eingetragen. Für sehr kleine $\mu_0\delta$ gilt die Näherung

$$\bar{\Psi}(\mu_0\delta) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Psi(\mu_0\delta) \approx 1,128 \Psi(\mu_0\delta),$$

während für größeres $\mu_0\delta$ der Unterschied zwischen $\bar{\Psi}$ und $\Psi(\mu_0\delta)$ nur noch gering ist [$\bar{\Psi} = 1,04 \Psi(\mu_0\delta)$ für $\mu_0\delta = 0,05$; $\bar{\Psi} = 1,02 \Psi(\mu_0\delta)$ für $\mu_0\delta = 0,15$], so daß man dort meist

$$\bar{\Psi}(\mu_0\delta) \approx \Psi(\mu_0\delta) \quad (33)$$

setzen kann.

Um die analoge Rechnung für die Aktivierungsstörung bzw. den Anteil (I) der Dichtestörung durchzuführen, müßte man die mittlere Energieabgabe bei einem einzigen Streuprozess kennen. Die tatsächlichen Verhältnisse liegen zwischen folgenden Grenzfällen:

1. voller Energieaustausch (Wiederherstellung der Geschwindigkeitsverteilung des ungestörten Feldes bei einem Streuprozess): dann ist die Funktion $\varphi_0(\mu\delta)$ über die Geschwindigkeitsverteilung des Neutronenflusses zu mitteln; es ergibt sich als gute Näherung

$$\bar{\varphi}_0(\mu_0\delta) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \varphi_0(\mu_0\delta) \approx 0,886 \varphi_0(\mu_0\delta);$$

2. kein Energieaustausch bei einer einzigen Streuung: es ist die Funktion $\varphi_0(\mu\delta)$ über die Geschwindigkeitsverteilung der Neutronendichte zu mitteln wie in Gl. (32) mit der Näherung

$$\bar{\varphi}_0(\mu_0\delta) \approx \varphi_0(\mu_0\delta). \quad (34)$$

Die Näherungen (33) und (34) haben einen relativen Fehler von höchstens 12% und genügen meist für praktische Zwecke. Man hat dann in allen Gleichungen für den Absorptionskoeffizienten μ den Wert μ_0 bei der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit v_0 der MAXWELL-Verteilung einzusetzen.

6. Vergleich mit Messungen der Aktivierungsstörung

In einer früheren Arbeit³ wurde die Aktivierungsstörung κ_C verschiedener Indiumsonden in Graphit gemessen. Die dort gefundenen Werte für κ_C wurden zusammen mit den theoretischen Werten nach Gl. (20) in Abhängigkeit von $\mu_0\delta$ aufgetragen (Abb. 11). Hierbei wurden als Absorptionskoeffizient des Indiums $\mu_0 = 0,94 \pm 0,06 \text{ cm}^2/\text{g}$ und als Streuweglänge von Graphit $\lambda_s \approx \lambda_t = 2,6 \text{ cm}$ eingesetzt³.

⁷ vgl. auch G. M. BRANCH, U.S. Atomic Energy Commission, MDDC 747 [1946].

Abb. 11. Aktivierungsstörung $\bar{\kappa}_c$ von Indiumsonden in Graphit;

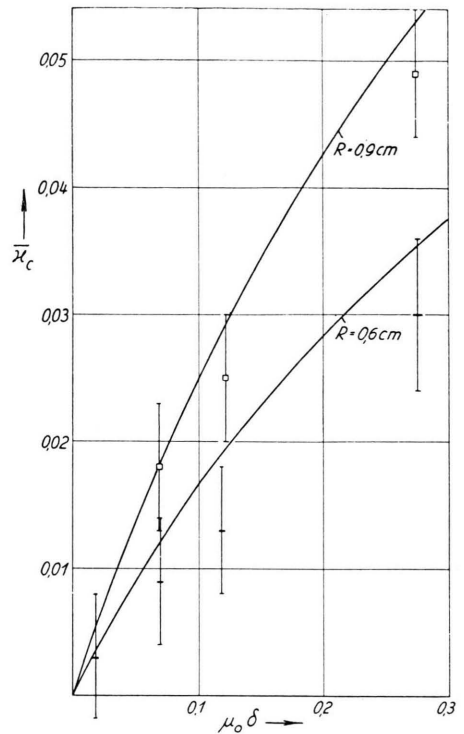
▬ Meßwerte für $R=0,6$ cm, □ Meßwerte für $R=0,9$ cm,
— theoretischer Wert nach Gl. (20).

Die Meßwerte werden für die Sondenradien $R=0,6$ cm ($R/\lambda_s=0,23$) und $R=0,9$ cm ($R/\lambda_s=0,35$) durch die Theorie im Rahmen der Fehlergrenzen wiedergegeben, obwohl die Voraussetzung $R \ll \lambda_s$ von Gl. (20) nicht in Strenge erfüllt ist. Für $\mu\delta > 0,1$ ergibt die Theorie etwas zu große Werte, da die Mittelung in Gl. (11) für größere $\mu\delta$ nicht mehr gerechtfertigt ist.

Die Ergebnisse für die Dichtestörung Gln. (28) und (31) werden in der folgenden Arbeit⁸ mit Messungen verglichen.

Herrn Prof. WIRTZ danke ich für seine wohlwollende Unterstützung.

⁸ H. MEISTER, Störung der Neutronendichte in der Umgebung einer absorbierenden Sonde, Z. Naturforsch. **11 a**, 356 [1956].



Störung der Neutronendichte in der Umgebung einer absorbierenden Sonde

Von H. MEISTER

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen
(Z. Naturforsch. **11 a**, 356—359 [1956]; eingegangen am 13. Februar 1956)

Es wird experimentell untersucht, wie sich die Dichteverteilung der thermischen Neutronen in Graphit bei Anwesenheit einer kreisscheibenförmigen Sonde in deren Umgebung ändert. Für große Abstände z von der Sondenfläche ($z \gg \lambda_s$) stehen die Meßergebnisse im Einklang mit der elementaren Diffusionstheorie¹, für Punkte in der Nähe der Sondenoberfläche ($z \ll \lambda_s$) lassen sie sich durch die in der vorangehenden Arbeit abgeleiteten Formeln verstehen.

In verschiedenen Punkten (r) auf der Achse der Sonde sowie auf ihrer Oberfläche wird mit einer hinreichend kleinen Meßsonde die Neutronendichte gemessen:

1. bei Anwesenheit der störenden Sonde [gestörte Dichte $\varrho(r)$],
2. bei Abwesenheit derselben [ungestörte Dichte $\varrho_0(r)$].

Die Dichtedepression $\Delta\varrho(r) = \varrho_0(r) - \varrho(r)$ wird auf die im Mittelpunkt der Sonde herrschende Dichte ϱ_s bezogen und als Dichtestörung $\kappa(r)$ bezeichnet¹:

$$\kappa(r) = [\varrho_0(r) - \varrho(r)] / \varrho_s. \quad (1)$$

Die auf der Achse im Abstand z von der Sonde gemessene Dichtestörung wird mit den nach der elementaren Diffusionstheorie¹ für $z \gg \lambda_s$ abgeleiteten Werten

$$\kappa(z) = \frac{3}{2} \frac{\Phi_0(\mu\delta)}{2 - \Phi_0(\mu\delta)} \cdot \frac{L}{\lambda_t} \cdot \{e^{-z/L} - \exp[-(1/L) \sqrt{R^2 + z^2}]\} \quad (2)$$

und der in der vorangehenden Arbeit² für $z \ll \lambda_s$ gefundenen Gl. (31)

¹ M. A. VIGON u. K. WIRTZ, Z. Naturforsch. **9 a**, 286 [1954].

² H. MEISTER, Z. Naturforsch. **11 a**, 347—356 [1956].